§6.3 辐角原理与儒歇定理

问题：$\oint\limits_C \frac{f'(z)}{f(z)}dz$ 的几何意义；$\mathrm{Res}\frac{f'(z)}{f(z)}$ 与 C 内 $f(z)$ 极点、零点的关系。

一、对数留数

1、定义

Def. 设 $f(z)$ 在围线 C 上解析非零，称积分 $\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_C \frac{f'(z)}{f(z)}dz$ 为 $f(z)$ 在 C 上的对数留数。

2、对数留数的几何意义

Thm1. 设 $f(z)$ 在围线 C 上解析非零，则 $\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_C \frac{f'(z)}{f(z)}dz = \frac{\Delta_C \arg f(z)}{2\pi}$

这里 $\frac{\Delta_C \arg f(z)}{2\pi}$ 表示当 z 绕 C 一圈时其像曲线绕原点的环绕圈数。

Pf.
$$\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_C \frac{f'(z)}{f(z)}dz = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_C d\ln f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_C d(\ln|f(z)| + i\arg f(z))$$
$$= \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_C d\ln|f(z)| + \frac{1}{2\pi}\oint\limits_C d\arg f(z)$$
$$= 0 + \frac{\Delta_C \arg f(z)}{2\pi}$$

二、辐角原理

1、两个引理

Lem1. 若 $f(z)$ 以 a 为 n 级零点，则 $\frac{f'(z)}{f(z)}$ 以 a 为一级极点，

且 $\mathrm{Res}_{z=a}\frac{f'(z)}{f(z)} = n$

Lem2. 若 $f(z)$ 以 a 为 m 级极点，则 $\frac{f'(z)}{f(z)}$ 以 a 为一级极点，

且 $\mathrm{Res}_{z=a}\frac{f'(z)}{f(z)} = -m$.

Pf. (1) $f(z)$ 可记为 $f(z)=(z-a)^n\cdot\varphi(z)$，$\varphi(z)$ 在 $z=a$ 解析非零

则 $\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}$ 在 $z=a$ 解析，且 $f'(z)=n(z-a)^{n-1}\varphi(z)+(z-a)^n\varphi'(z)$

$\frac{f'(z)}{f(z)}=\frac{n}{z-a}+\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}$，于是 $\operatorname*{Res}_{z=a}\frac{f'(z)}{f(z)}=C_{-1}=n$.

(2) 同理 $f(z)=\frac{\lambda(z)}{(z-b)^m}$，$\lambda(z)$ 在 $z=b$ 解析非零

则 $\frac{\lambda'(z)}{\lambda(z)}$ 在 $z=b$ 解析，且 $f'(z)=\frac{\lambda'(z)(z-b)^m-m(z-b)^{m-1}\lambda(z)}{(z-b)^{2m}}$

$\frac{f'(z)}{f(z)}=\frac{\lambda'(z)}{\lambda(z)}-\frac{m}{z-b}$，于是 $\operatorname*{Res}_{z=b}\frac{f'(z)}{f(z)}=C_{-1}=-m$.

2. 辐角原理

Thm 2. 设 $f(z)$ 在围线 C 内除有限个极点外解析，在 C 上也解析，且非零，则 $\frac{\Delta_C \arg f(z)}{2\pi}=N(f(z),C)-P(f(z),C)=N-P$.

这里 N 表示 $f(z)$ 在 C 内零点总个数（k 级零点表示 k 个零点），

P 表示 $f(z)$ 在 C 内极点总个数（k 级极点表示 k 个极点）.

Pf. $\frac{\Delta_C \arg f(z)}{2\pi}=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f'(z)}{f(z)}dz$，记 $f(z)$ 在 C 内零点 $a_1,a_2,\cdots,a_p$

极点 $b_1,b_2,\cdots,b_q$，对应 ~~极数~~ 级为 $n_1,n_2,\cdots,n_p$，$m_1,m_2,\cdots,m_q$.

则 $\frac{f'(z)}{f(z)}$ 在 C 内以 $a_1,\cdots,a_p,b_1,\cdots,b_q$ 为一级极点.

由留数定理，$\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f'(z)}{f(z)}dz=\sum_{i=1}^{p}\operatorname*{Res}_{z=a_i}\frac{f'(z)}{f(z)}+\sum_{i=1}^{q}\operatorname*{Res}_{z=b_i}\frac{f'(z)}{f(z)}$

由 Lem 1.，Lem 2.，$\sum_{i=1}^{p}\operatorname*{Res}_{z=a_i}\frac{f'(z)}{f(z)}+\sum_{i=1}^{q}\operatorname*{Res}_{z=b_i}\frac{f'(z)}{f(z)}=\sum_{i=1}^{p}n_i-\sum_{i=1}^{q}m_i=N-P$.

例如，$f(z)=(z-1)(z-2)^3(z-4)$ 在 $|z|<3$ 上解析，有 4 个零点，

则 $N-P=4$. 沿 $|z|=3$ 逆时针转一圈时 $f(z)$ 绕原点转了四圈.

三. 儒歇定理

Thm 3. (Rouché)

设 $f(z)$ 与 $\varphi(z)$ 在 C 内解析，在 C 上解析~~并~~且 $|f(z)|>|\varphi(z)|$，则 $f(z)$ 与 $f(z)\pm\varphi(z)$ 在 C 内部有同样个数的零点.

Pf. 在 C 上 $|f(z)|>0$，$\left|\frac{\varphi(z)}{f(z)}\right|<1$，$\Delta_C \arg[f(z)\pm \varphi(z)]=\Delta_C\arg[f(z)(1\pm\frac{\varphi(z)}{f(z)})]$

$$\Delta_C \arg\left[f(z)\cdot\left(1\pm\frac{\varphi(z)}{f(z)}\right)\right]=\Delta_C \arg f(z)+\Delta_C\arg\left(1\pm\frac{\varphi(z)}{f(z)}\right)$$
$$=\Delta_C\arg f(z)+0$$

由辐角原理，$N_1-P_1=N_2-P_2$ ($P_1=P_2=0$)

于是 $N_1=N_2$，N_1,N_2 分别表示 $f(z)$ 和 $f(z)\pm\varphi(z)$ 在 C 内零点个数.

例如，(1) 方程 $z^5+8z^3+2z+1=0$ 在 $|z|<1$ 内有3个~~零点~~根；

取 $f(z)=8z^3$，$\varphi(z)=z^5+2z+1$，$\left|\frac{\varphi(z)}{f(z)}\right|<1$

(2) 方程 $z^8+7z^2+2z+19=0$ 在 $|z|<2$ 内有8个根：

取 $f(z)=z^8$，$\varphi(z)=7z^2+2z+19$，$\left|\frac{\varphi(z)}{f(z)}\right|<1$，$|z|<2$

取 $f(z)=19$，$\varphi(z)=z^8+7z^2+2z$，$\left|\frac{\varphi(z)}{f(z)}\right|<1$，$|z|<1$

(3) 任意多项式方程 $z^n+\cdots+a_1z+a_0=0$ 在 z 平面上有 n 个根.